УДК 517.518.68

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Ю.Х. Хасанов[1]

1 *yukhas60@mail.ru*; Российско–Таджикский (Славянский) университет

В работе исследуется вопрос о приближении почти–периодических функций целыми функциями конечной степени с произвольным спектром в равномерной метрике. Также устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности равномерных почти–периодических функций классу целых функций.

Ключевые слова: почти-периодические функции, ряды Фурье, спектр функции, целые функции конечной степени, тригонометрические полиномы, наилучшее равномерное приближение.

Определение 1 [1]. *Непрерывная на всей вещественной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти–периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \;\; (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти–периодических функций, его обозначим через $\mathbf{B}$, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где A_k — коэффициенты Фурье, λ_k — показатели Фурье (спектр функции $f(x) \in \mathbf{B}$), с нормой

$$||f(x)||_{\mathbf{B}} = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Рассмотрим класс функций $f(x) \in \mathbf{B}$ с произвольным спектром $\{\lambda_k\}$, т.е. функций, имеющих ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x)\, dx.$$

Известно [2], что для класса функций $f(x) \in \mathbf{B}$ величина A_k может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений спектра λ. Именно это обстоятельство делает возможным распространение понятия ряда Фурье на область почти–периодических функций.

Через $\mathbf{G}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций степени не выше σ. Рассмотрим следующий важный вопрос. Пусть дана функция $f(x) \in \mathbf{B}$. Каковы необходимые и достаточные условия для принадлежности этой функции к классу $\mathbf{G}_\sigma$. Для решения этого вопроса приведем утверждение, которое ранее использовано автором в работе [3].

Теорема 1. *Для того чтобы равномерная почти–периодическая функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathbf{G}_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_k\}$ удовлетворяли неравенству*

$$|\lambda_k| \le \sigma.$$

С.Н. Бернштейн [4] установил, что среди функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, осуществляющих на всей действительной оси наилучшее равномерное приближение 2π–периодической функции $f(x)$ найдется тригонометрический полином степени не выше σ. Доказательство основывается на том, что, если $g_\sigma(f;x) \in G_\sigma$ и

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| = A_\sigma(f), \tag{1}$$

где $A_\sigma(f)$ — наилучшее равномерное приближение порядка σ 2π-периодической, периода 2π, функции посредством функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, то равномерно по всем $x(-\infty < x < \infty)$ имеют места следующие оценки:

$$|f(x) - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} g_\sigma(x+2k\pi)| \le A_\sigma(f), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \left\{g_\sigma(x+2k\pi+2\pi) - g_\sigma(x+2k\pi)\right\} = 0. \tag{3}$$

Отметим, что вышеприведенный результат С.Н. Бернштейна можно получить также, если вместо (2) и (3) использовать соотношения

$$|\Phi_n(x) - Q_{\sigma,N,n}(x)| \le A_\sigma(f),$$

где $\sigma > 0; N, n$ — любые натуральные числа,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t)F_n(t)\,dt,$$

$$Q_{\sigma,N,n}(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t)F_n(t)\,dt,\ F_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

и при всяком фиксированном n равномерно по $x \in (-\infty,\infty)$

$$\lim_{N\to\infty} \{Q_{\sigma,N,n}(x+2\pi) - Q_{\sigma,N,n}(x)\} = 0.$$

При проведении аналогичных исследований, в отличие от периодического случая, где условия накладываются только на гладкости функций, для $f(x) \in B$ требуются дополнительные условия и на поведения показателей Фурье (см. напр., [5] или [6]):

а) когда показатели Фурье имеют предельную точку в бесконечности, т.е.

$$|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|, \quad \lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty;$$

б) когда показатели Фурье имеют предельную точку в нуле,

$$|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|, \quad \lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = 0.$$

Впервые аналог теоремы С.Н. Бернштейна для функций $f(x) \in B$ встречается в работах Е.А. Бредихиной [7]-[8]. Используя метод доказательства С.Н. Бернштейна, она установила, что если функция $f(x) \in B$ и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_k A_k \exp(i\lambda_k \beta x),$$

имеющий показатели Фурье с предельной точкой в бесконечности, то среди функций $g_\sigma(x) \in G_\sigma$ $(\sigma > 0)$, для которых имеет место равенство (1), найдется тригонометрический полином степени не выше σ.

Теперь с помощью теоремы 1 сформулируем основной результат данной заметки, который является также аналогом теоремы С.Н. Бернштейна для равномерных почти–периодических функций с произвольными показателями Фурье $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| \ (\sigma > 0).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется конечная тригонометрическая сумма*

$$P_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \exp(i\lambda_k x) \ \ (|\lambda_k| \le \sigma),$$

для которой равномерно по x справедлива оценка

$$|f(x) - P_\sigma(x)| \le A_\sigma(f) + \varepsilon.$$

Для полноты изложения наряду с теоремой 2 приводим следующее утверждение, когда спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$ на любом конечном отрезке имеет конечное число предельных точек и, более того, является приводимым множеством.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *с приводимым спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$, *то среди функций* $g_\sigma(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$, *для которых справедливо равенство (1), найдется функция* $Q_\sigma(f;x) \in \boldsymbol{B}$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{|\lambda_k|\le\sigma} A_k \exp(i\lambda_k x).$$

В заключение для равномерных почти–периодических функций попытаемся найти функцию $g(x) \in \mathbf{G}_\sigma$, которая удовлетворяет условию $A_\sigma(f) \le C\omega(f;1/\sigma)$, где C — некоторая абсолютная константа и

$$\omega(f;\sigma) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *со спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ *и*

$$f_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_\sigma(u-z)\,du, \quad \text{где}$$

$$\psi_\sigma(z) = \frac{1}{\pi\sigma^3} \cdot \frac{\sin^4 \frac{\sigma z}{4}}{z^4}.$$

Тогда $f(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$ *и* $\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f_\sigma(x)| < C\omega(f; \sigma^{-1})$, *где* C *— абсолютная константа.*

Литература

1. Бор Г. *Почти периодические функции.* – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 128 с.

2. Левитан Б. М. *Почти–периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

3. Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х. *О приближениях почти–периодических функций целыми функциями* // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 64–70.

4. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений.* – Т. 2. – М.: Изд. АН СССР, 1954. – 627 с.

5. Хасанов Ю. Х. *Абсолютная сходимость рядов Фурье почти–периодических функций* // Матем.заметки. – 2013. – Т. 94. – № 5. – С. 745–756.

6. Хасанов Ю. Х. *Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодических функций* // Anal.Math. –2013. – V. 39. – P. 259–270.

7. Бредихина Е. А. *К вопросу об аппроксимации почти–периодических функций* // Сиб.матем.журн. – 1964. – Т. 5. – № 4. – С. 768–773.

8. Бредихина Е. А. *К теореме С.Н.Бернштейна о наилучшем приближении непрерывных функций целыми функциями данной степени* // Известия вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 3–7.

APPROXIMATION OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS IN UNIFORM METRIC

Yu.Kh. Khasanov

The paper is devoted to investigation of a problem of approximation of almost periodic functions by entire functions with given spectrum in uniform metric. Also necessary and sufficient conditions for belonging of uniformly almost periodic functions to the class of entire functions are obtained.

Keywords: almost periodic functions, Fourier series, spectrum to function, entire functions of finite order, trigonometric polynomial, best uniform approximation.